

フィルターと位相空間の公理化：完全ガイド

本稿では、集合論的なフィルターの定義から出発し、近傍系による位相の導入、ウルトラフィルターモナドを用いた圏論的な「Lax代数」としての位相空間の定義、そして層やトポスの理論への接続までを体系的に解説します。

1. フィルターの基礎定義

集合 X の部分集合の族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X 上のフィルターであるとは、以下の3条件を満たすことです。

- (F1) 非空性: $\emptyset \notin \mathcal{F}$ かつ $X \in \mathcal{F}$
- (F2) 有限交叉性: $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
- (F3) 上方閉性: $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \subseteq X \implies B \in \mathcal{F}$

特に、包含関係に関して極大なフィルターを **ウルトラフィルター (Ultrafilter)** と呼び、任意の部分集合 A について $A \in \mathcal{U}$ または $A^c \in \mathcal{U}$ のいずれかが必ず成立するという「鋭さ」を持ちます。

2. 近傍系による位相空間の構成

伝統的な位相空間の定義（開集合系）は、各点 x の「近くにある集合」の集まりである近傍系によって書き換えることができます。

各点 $x \in X$ にフィルター $\mathcal{V}(x)$ が割り当てられ、以下を満たすとき、それは位相を定めます：

- 任意の $V \in \mathcal{V}(x)$ に対して $x \in V$
- 任意の $V \in \mathcal{V}(x)$ に対して、ある $W \in \mathcal{V}(x)$ が存在し、任意の $y \in W$ について $V \in \mathcal{V}(y)$

3. ウルトラフィルターモナド β

集合 X に対してその上のウルトラフィルター全体の集合 βX を対応させる操作は、集合の圏 **Set** 上の **モナド** を形成します。

3.1 関手としての作用

写像 $f: X \rightarrow Y$ は、 $\beta f(\mathcal{U}) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{U}\}$ によって拡張されます。また、関係 $R \subseteq X \times Y$ もスパン $X \xleftarrow{p} R \xrightarrow{q} Y$ を通じて以下のように拡張されます（Barr拡張）：

$$\bar{\beta}R = \{(\beta p(W), \beta q(W)) \mid W \in \beta(R)\} \subseteq \beta X \times \beta Y$$

3.2 構造射：単位と乗法

- **単位** $\eta_X : X \rightarrow \beta X$: 点 x を、それを含む集合全体の族 (主ウルトラフィルター) へ移す。
- **乗法 (平坦化)** $\mu_X : \beta(\beta X) \rightarrow \beta X$: 「フィルターのフィルター」を一つに集約する。

$$A \in \mu_X(\mathcal{U}) \iff \{\mathcal{V} \in \beta X \mid A \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$$

3.3 平坦化 μ_X の噛み砕いた解説：メタ代表者システム

平坦化 μ_X は、一見複雑な「フィルターのフィルター」という二階建ての構造を、一階建ての普通のフィルターへと引き戻す操作です。これを「**代表者の代表による多数決**」というアナロジーで理解してみましょう。

① 登場人物の整理

- **集合 X** : 投票の対象となる「国民」がいる場所。
- **一階の代表者 ($\mathcal{V} \in \beta X$)**: どの集合 $A \subseteq X$ が「多数派 (大きい)」かを判断する基準。
- **二階のメタ代表者 ($\mathcal{U} \in \beta(\beta X)$)**: 「一階の代表者たち」の中から、どのグループの意見を重視すべきかを判断する基準。

② 「平坦化された多数派」を決めるステップ

ある集合 $A \subseteq X$ が、平坦化された結果として「多数派 ($\in \mu_X(\mathcal{U})$)」と認められるまでのプロセスは以下の通りです：

Step 1: 各代表者の意見を聞く

すべての代表者 \mathcal{V} に対して、「あなたにとって A は多数派ですか？」と尋ねます。

Step 2: 「賛成派代表者」のリストを作る

A を多数派だと認めた代表者たちの集合を $\hat{A} = \{\mathcal{V} \in \beta X \mid A \in \mathcal{V}\}$ とします。

Step 3: メタ代表者による最終裁定

この「賛成派代表者リスト \hat{A} 」自体が、メタ代表者 \mathcal{U} にとって「無視できない大きなグループ」である場合 ($\hat{A} \in \mathcal{U}$)、最終的に A は全体として多数派であると認定されます。

つまり、 μ_X とは「**個々のフィルターの意見を、高次のフィルターの視点で集計し、単一のフィルターの意見へと要約する**」という情報の圧縮・集約プロセスなのです。

3.4 βX の幾何学的構造と平坦化の位相的意味

平坦化 μ_X は、単なる集合論的な操作ではなく、 βX という空間が持つ「**極度不連結 (Extremely Disconnected)**」なコンパクト Hausdorff 空間としての性質と深く結びついています。

① ストーン空間 βX のトポロジー

集合 X に離散位相を入れたときのストーン・チェック・コンパクト化が βX です。この空間は、 $\mathcal{P}(X)$ というブール代数のストーン空間であり、以下の特殊な性質を持ちます：

- **極度不連結性**: 任意の開集合の閉包が、再び開集合 (開かつ閉集合) になる。
- **基底**: 任意の $A \subseteq X$ に対し、 $\hat{A} = \{\mathcal{V} \in \beta X \mid A \in \mathcal{V}\}$ たちが開かつ閉な基底をなす。

② μ_X は「極限をとる写像」である

βX がコンパクトHausdorff空間であるという事実は、「 βX 上の任意のウルトラフィルター \mathcal{U} は、 βX のただ一点に収束する」ことを意味します。この収束先を求める写像こそが、実は平坦化 μ_X なのです。

$$\mu_X(\mathcal{U}) = p \iff \mathcal{U} \rightarrow p \in \beta X$$

③ なぜ極度不連結性が重要か

βX が極度不連結であることは、その上の収束関係が極めて「安定的」であることを示唆しています。平坦化の定義式 $A \in \mu_X(\mathcal{U}) \iff \hat{A} \in \mathcal{U}$ は、 βX 上の連続関数（特性関数）の持ち上げに対応しており、離散的な集合 X の情報を、コンパクトな極限操作を通じて一貫性を保ったまま「代数的に集約」できるのは、この空間の強い不連結性（バラバラでありながら完備であること）に支えられています。

4. 核心：Lax 代数としての位相空間

位相空間とは、収束関係 $c: \beta X \rightsquigarrow X$ ($\mathcal{U} \rightarrow x$) がモナドの構造と整合している系であると言い換えられます。

公理1：反射律（単位元図式）

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ \eta_X \downarrow & \nearrow c & \\ \beta X & & \end{array}$$

論理： $1_X \subseteq c \circ \eta_X$ (点 x に対応するフィルター $\eta(x)$ は x に収束する)

公理2：推移律（乗法図式）

$$\begin{array}{ccc} \beta(\beta X) & \xrightarrow{\bar{\beta}c} & \beta X \\ \mu_X \downarrow & & \downarrow c \\ \beta X & \xrightarrow{c} & X \end{array}$$

論理： $c \circ \bar{\beta}c \subseteq c \circ \mu_X$

図式の解説：

上側のルート ($c \circ \bar{\beta}c$) は、「収束先の点の集まり」がさらにどこに収束するか（極限の極限）を表します。左側のルート ($c \circ \mu_X$) は、多重構造を平坦化して直接収束させることを表します。位相空間では、この「二段階の収束」が矛盾なく一つの収束関係に収まることが要請されています。

5. 性質の対照表

位相的概念	ウルトラフィルターによる記述

収束 $\mathcal{U} \rightarrow x$	関係 $(\mathcal{U}, x) \in c$
コンパクト性	関係 c が全域的 (任意の \mathcal{U} が少なくとも一つの x に収束する)
ハウスドルフ性	関係 c が単有的 (任意の \mathcal{U} が高々一つの x に収束する)
コンパクト・ハウスドルフ	$c: \beta X \rightarrow X$ が完全な関数となり、等号 $c \circ \beta c = c \circ \mu_X$ が成立する

6. 一般化と再定式化：層 (Sheaf) とトポスの理論への接続

ウルトラフィルターモナド β を用いた Lax代数による位相空間の定義 (Barrの定理) は、「点 (Point)」を基盤とする極めて美しい枠組みです。これを「開集合 (Point-free)」を基盤とする層 (Sheaf) やトポス (Topos) の理論と結びつけ、一般化する現代的なアプローチについて解説します。

6.1 トポス内部への展開：ウルトラフィルターから「フィルター」へ

Barrの定理を、集合の圏 **Set** から一般の層の圏 (Grothendieckトポス) へ拡張する際の最大の障害は、トポス内部では一般に選択公理 (ツォルンの補題) が成立しないことです。

ウルトラフィルターの存在は選択公理に依存するため、層の言葉 (トポス内部の論理) で素直に β を定義することはできません。この問題を回避するため、トポス内部ではウルトラフィルターの代わりに一般のフィルターモナド \mathbb{F} (あるいは素フィルターモナド) が用いられます。フィルターモナド \mathbb{F} 上のLax代数に特定のグリッド条件 (Grid condition) を付加することで、層の圏の内部における「位相空間」を定式化できます。

6.2 Lawvere-Tierney 位相：コモナドと双対的な翻訳

Lax代数が「点に対する極限 (閉包作用素)」を定めるのに対し、層の理論において空間の「位相」に相当するものは、トポスの真理値対象 Ω 上の自己射 $j: \Omega \rightarrow \Omega$ (Lawvere-Tierney位相) として定義されます。

ウルトラフィルターモナドが「モナド」による代数的な極限操作を捉えるのに対し、層の位相は「コモナド」や局所作用素 (Local operator) による開集合の貼り合わせ・内部作用素を定めます。両者は、空間を「点の集積」とみるか「観測の重なり」とみるかの双対的な関係にあります。

6.3 究極の一般化：モノイダル位相幾何学 ((T, V) -圏)

現在、ウルトラフィルターのLax代数と層の理論を完全に同一の数式で統一する枠組みとして、Hofmann, Seal, Tholen らによる (T, V) -圏の理論が存在します。

(T, V) -圏は、以下の2つを指定して作られる代数系です：

- T (モナド) : 例：ウルトラフィルターモナド β 、あるいは恒等モナド Id 。
- V (真理値の代数=クワンテール) : 例：古典論理 $\{0, 1\}$ 、実数 $[0, \infty]$ 、完備ハイティング代数 (開集合系・Frame)。

この枠組みでは、驚くべきことに以下の概念が一つの「 (T, V) -圏上の関係代数」として完全に統一されます。

空間の概念	モナド T	真理値 V
Barrの位相空間	β (ウルトラフィルター)	$\{0, 1\}$ (古典論理)
Lawvereの距離空間	Id (恒等モナド)	$[0, \infty]$ (距離・実数)
層 (Sheaves)	Id (恒等モナド)	Frame (開集合系・完備ハイティング代数)

深い洞察:

層の理論とは、空間のまとまりを表現する際に、モナド側を Id と極めてシンプルにする代わりに、真理値 V 側を「開集合系」という非常に豊かな構造へ拡張したものです。逆にBarrの位相空間は、真理値が $\{0, 1\}$ しかない貧弱な世界において、空間の連続性を表現するためにモナド側を β という極限まで太らせたものと解釈できます。これらはパラメータ (T, V) を切り替えただけの**全く同じエンリッチド・カテゴリー構造**の異なる側面なのです。

7. 現代数学の最先端：凝縮数学 (Condensed Mathematics) との交差点

近年、Dustin Clausen と Peter Scholze によって提唱され、現代の数論幾何学に革命をもたらしつつある**凝縮数学 (Condensed Mathematics)** は、「完全不連結コンパクトHausdorff空間の上の層」として位相空間を再定義します。一見すると第4章までのウルトラフィルターのアプローチとは無関係に見えますが、実は両者は「**極度不連結コンパクトHausdorff空間**」という共通の**"原子"**を用いて**連続性を代数的に取り出す**という点で、極めて密接に根を共有しています。

7.1 基本定義：凝縮集合とテスト空間

凝縮数学では、古典的な位相空間 X を直接扱う代わりに、位相を「探査機からの写像の集まり」として捉え直します。

- プロ有限空間 (Profinite Space):** 有限離散空間の逆極限として得られる空間。完全不連結なコンパクトHausdorff空間と同値です。
- 凝縮集合 (Condensed Set):** プロ有限空間の圏（あるいはより強力な極度不連結空間の圏）から集合の圏への反変関手であり、適切な「Grothendieck位相」に関して**層の公理 (貼り合わせの公理)**を満たすものです。

任意の位相空間 X は、 $S \mapsto C(S, X)$ (S から X への連続写像全体の集合) という対応規則を考えることで、凝縮集合と同一視されます。つまり、 S という「テスト空間」を無数に用意し、 X へのあらゆる連続写像を調べることで、 X の位相構造を完全に決定しようというアプローチです。

7.2 βX の正体と共通の「骨格」

ホモロジー代数的な計算を円滑にするため、Scholzeらはサイト（圏の基盤）としてさらに条件の強い「**極度不連結コンパクトHausdorff空間**」を採用します。

ここで第3.4節を思い出してください。離散集合にウルトラフィルターを全て集めた空間 βX こそが、**極度不連結コンパクトHausdorff空間の最も代表的かつ普遍的な例**なのです。

つまり、アプローチの方向性は逆に見えても、両者は全く同じ種類の「空間の骨格」を利用しています。

- **凝縮数学:** 「極度不連結空間 S (βX の親戚) からの連続写像を層として集めよう」
- **ウルトラフィルター:** 「極度不連結空間の親玉である βX から X への収束関係 (Laxな写像) を代数的に記述しよう」

7.3 「収束」と「連続写像」の完全な翻訳

凝縮数学における関手 $C(S, X)$ の振る舞いは、ウルトラフィルターの収束関係 $c: \beta X \rightsquigarrow X$ の情報を完全に内包しています。極度不連結空間 S (簡単のため $S = \beta Y$ とします) から位相空間 X への写像 $f: \beta Y \rightarrow X$ を考えてみましょう。

1. Y の各点 y は、主ウルトラフィルターとして βY に埋め込まれています。これを f で送ると、単なる写像 $f_0: Y \rightarrow X$ が得られます。
2. では、非自明なウルトラフィルター $\mathcal{U} \in \beta Y$ はどこに送られるべきでしょうか？
3. f の**連続性**により、 $f(\mathcal{U})$ は「 f_0 によって X に写されたフィルターが収束する先の点 $x \in X$ 」に強制的に決定されます。

すなわち、凝縮数学において「極度不連結空間 S からの連続写像を考える」という行為は、暗黙のうちに「 X におけるウルトラフィルターの収束先 (極限) をすべて決定している」ことと完全に等価なのです。

まとめ：代数と幾何の双対性 (なぜ凝縮数学が必要になったのか?)

Barrの定理 (Lax代数) は、空間 X の「内側」にモナド β の作用を与える**代数的・内部的アプローチ**でした。これは概念として非常に美しいものの、位相アーベル群などのコホモロジーを計算する際、古典的な位相空間の圏がアーベル圏にならないという致命的な欠陥を持っていました。

対して凝縮数学は、米田の補題の精神に基づき、空間の「外側」にあるテスト空間からの関手として位相を捉える**幾何学的・外部的アプローチ (層の理論)** です。圏論において「 β モナドの代数」と「 β の自由代数 (極度不連結空間) 上の層」は表裏一体の存在です。

「ウルトラフィルターモナドは位相の"代数的本質"を暴き出し、凝縮数学はその本質を"層のテスト環境"として用いることで、位相空間の圏を完璧な計算環境 (アーベル圏) へとアップグレードした」——これこそが、古典的なトポロジーの公理化と、最先端の凝縮数学とを結ぶ、最も美しく深遠な関係性だと言えます。

8. 関手 $\Phi: \mathbf{Top} \rightarrow [\mathbf{CHaus}^{op}, \mathbf{Set}]$ の圏論的性質と証明

位相空間 X に対して、コンパクトHausdorff空間 S をテスト空間として連続写像の集合 $\Phi(X)(S) = C(S, X)$ を対応させる共変関手 Φ は、位相空間の連続性を圏論的に翻訳する上で極めて強力な3つの性質を持ちます。これは米田埋め込みの拡張の一種とみなすことができます。

性質1：左随伴関手を持つ (極限の完全な保存)

関手 Φ は左随伴関手 $L: [\mathbf{CHaus}^{op}, \mathbf{Set}] \rightarrow \mathbf{Top}$ を持ちます。これにより Φ は右随伴関手となり、**Top** における**すべての小極限 (直積や引き戻しなど) を前層の圏の極限に完全に保存**します。

証明：左随伴 L の構成と随伴性

前層 $P \in [\mathbf{CHaus}^{op}, \mathbf{Set}]$ に対し、左随伴 $L(P)$ は圏論的なコエンド (Coend) を用いて位相空間として以下のように構成されます：

$$L(P) = \int^{S \in \mathbf{CHaus}} P(S) \times S$$

ここで、 $P(S)$ は離散位相を入れた単なる集合であり、 $P(S) \times S$ は S の $P(S)$ 個の直和 (非交和) を表します。このコエンドは自然変換から定まる関係で直和空間を割った商位相空間です。

任意の位相空間 X と前層 P について、随伴性 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(L(P), X) \cong \mathbf{Hom}_{[\mathbf{CHaus}^{op}, \mathbf{Set}]}(P, \Phi(X))$ を示します。

1. コエンドから写像する普遍性により、 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\int^S P(S) \times S, X\right) \cong \int_S \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(P(S) \times S, X)$ となります。
2. 直和の性質より、 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(P(S) \times S, X) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(P(S), C(S, X))$ 。
3. これを代入するとエンド (End) の定義より、 $\int_S \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(P(S), C(S, X)) = \mathbf{Hom}_{[\mathbf{CHaus}^{op}, \mathbf{Set}]}(P, C(-, X))$ となり、右辺に一致します。

よって Φ は右随伴関手です。□

性質2：コンパクト生成空間 (CG空間) への制限による充満忠実性

Φ は一般の位相空間の圏全体では充満忠実ではありませんが、**コンパクト生成空間 (CG空間)** の圏に制限すると**充満忠実関手 (Fully Faithful Functor)** となります。CG空間とは、「部分集合が閉であるのは、任意のコンパクト空間からの連続写像による逆像が閉であるとき、かつそのときに限る」という性質を持つ空間であり、CW複体や距離空間など実用的な空間はすべて含まれます。

証明：CG空間における Φ の充満忠実性

CG空間 X, Y について、写像 $C(X, Y) \rightarrow \mathbf{Nat}(\Phi(X), \Phi(Y))$ が全単射であることを示します。

【単射性】 位相空間の1点空間 $\{*\}$ は \mathbf{CHaus} の対象であり、 $\Phi(X)(\{*\}) \cong X$ (台集合) です。自然変換 $\alpha : \Phi(X) \rightarrow \Phi(Y)$ が与えられれば、点を代入することで集合としての写像 $f_\alpha : X \rightarrow Y$ が一意に決まります。

【全射性】 $f_\alpha : X \rightarrow Y$ が連続であることを示せば十分です。任意のコンパクトHausdorff空間 S と連続写像 $g : S \rightarrow X$ (すなわち $g \in \Phi(X)(S)$) を取ります。自然変換の定義より、可換図式から $\alpha_S(g) = f_\alpha \circ g$ が成り立ちます。 $\alpha_S(g) \in \Phi(Y)(S) = C(S, Y)$ であるため、 $f_\alpha \circ g$ は連続写像です。 X はCG空間であるため、「任意のテスト写像 $g : S \rightarrow X$ との合成 $f_\alpha \circ g$ が連続である」という事実から、 f_α 自身が連続であることが保証されます。□

性質3：Grothendieck位相の下での「層」の公理の充足

関手 $\Phi(X) = C(-, X)$ は単なる前層ではなく、 \mathbf{CHaus} 上の被覆を「有限共同全射 (Finite Jointly Epimorphic families)」として定めたGrothendieck位相に関して**層 (Sheaf)** の公理を満たします。

証明：層条件の確認

被覆 $\{p_i : S_i \rightarrow S\}_{i=1}^n$ (すなわち $\bigcup p_i(S_i) = S$) が与えられたとき、 S_i からの連続写像たちが交わりで一貫すれば、商空間としての S 上の連続写像に一貫に貼り合わされることを示します。

1. **有限直和への帰着:** $S' = \coprod_{i=1}^n S_i$ と置くと、これもコンパクトHausdorff空間です。族 p_i は単一の全射連続写像 $p : S' \rightarrow S$ にまとまります。層条件は、系列 $C(S, X) \xrightarrow{p^*} C(S', X) \rightrightarrows C(S' \times_S S', X)$ が等化子 (イコライザ) になることと同値です。
2. **商写像の利用:** コンパクト空間からのHausdorff空間への連続全射 $p : S' \rightarrow S$ は閉写像であり、したがって商写像 (Quotient map) となります。すなわち $S \cong S' / \sim$ ($a \sim b \iff p(a) = p(b)$) と同相です。
3. **貼り合わせの普遍性:** 商位相の普遍性により、 S' からの連続写像がファイバー積 $S' \times_S S'$ 上で値が一貫するならば、それは商空間 S からの連続写像へと一意に分解されます。これはまさにイコライザの完全性を意味します。□

9. 凝縮数学におけるテスト空間の階層構造 (1)

第8章の関手 Φ の構成において、テスト空間の圏（サイト）を **CHaus** から別の部分圏へ置き換えた場合、対応する「層の圏」はどのように変化するでしょうか。Scholzeらの凝縮数学では、計算のホモロジー代数的な性質を向上させるために、テスト空間をより「バラバラ」なものへと制限していきます。以下の3つの階層が重要です。

(1) CHaus（コンパクトHausdorff空間の圏）を用いた場合

第8章で見た通り、テスト空間としてすべてのコンパクトHausdorff空間（例えば閉区間 $[0, 1]$ や球面などの連結空間も含む）を用いる設定です。

結果: 得られる層の圏は「Pyknotic sets（ピクノティック集合、Barwick-Haineによる定式化）」と実質的に等価になります。直感的な幾何学との相性は良いですが、サイトの対象が大きすぎる（連結成分を持ちすぎる）ため、層のコホモロジーを計算する際に射影分解を構成するのが困難になるという技術的な弱点があります。

(2) Profinite（完全不連結コンパクトHausdorff空間の圏）を用いた場合

テスト空間を、有限離散空間の逆極限として書ける「完全不連結空間（プロ有限空間）」に制限します。コントロール集合や p 進整数環 \mathbb{Z}_p などが含まれますが、区間 $[0, 1]$ のような連結空間は排除されます。

結果: これが標準的な「凝縮集合（Condensed Sets）」の定義です。驚くべきことに、テスト空間から連結空間を排除しても、 X がCG空間である限り、関手 $\Phi : \mathbf{Top}_{CG} \rightarrow \mathbf{CondSet}$ は**依然として充滿忠実**です。つまり、実数 \mathbb{R} のような連続的な空間の位相情報も、コントロール集合のような完全不連結空間からの写像の集まりだけで完全に復元できるのです。代数的な振る舞い（特にアーベル群の圏における完全列の扱い）が格段に良くなります。

(3) ExtDisc（極度不連結コンパクトHausdorff空間の圏）を用いた場合

テスト空間をさらに絞り込み、「任意の開集合の閉包が開集合になる」という最強の不連結性を持つ空間のみを許容します。第7章で見たウルトラフィルターの空間 βS （ストーン・チェック・コンパクト化）が代表例です。

結果: 極度不連結空間は、コンパクトHausdorff空間の圏における「射影的对象（Projective objects）」に一致します。テスト空間を射影的对象にまで制限すると、Grothendieck位相による被覆（全射）が、テスト空間上では「切断（セクション）」を持つようになります。

これにより、より複雑な層のコホモロジー計算において、**高次のコホモロジーが消滅する強力な射影分解**を自然に構成できるようになり、現代の数論幾何学における高度な計算（Liquid Tensor Experimentなど）を可能にする決定的な計算基盤が完成します。ウルトラフィルターの生み出す β モナドの極限空間が、ここで最先端の数学を支える土台として完全に回収されるのです。

10. 凝縮数学におけるテスト空間の階層構造 (2)

結論から述べますと、テスト空間の圏を**完全不連結コンパクトHausdorff空間の圏 (Prof)**や**極度不連結コンパクトHausdorff**

空間の圏 (**ExtDisc**)に制限しても、関手 Φ はコンパクト生成空間(CG空間)の圏 \mathbf{Top}_{CG} 上で依然として充満忠実です。

これは、凝縮数学(Condensed Mathematics)が成立するための極めて重要な数学的基盤となっています。以下に、その定義の確認と証明の詳細を解説します。

1. 準備：テスト空間とCG空間の定義

まず、議論の前提となる空間の性質を整理します。

(1) **コンパクト生成空間 (CG空間)**: 位相空間 X がCG空間であるとは、部分集合 $A \subseteq X$ が閉であるための必要十分条件が、「任意のコンパクトHausdorff空間 K と連続写像 $f: K \rightarrow X$ に対し、 $f^{-1}(A)$ が K で閉であること」である空間を指します。

(2) **完全不連結コンパクトHausdorff空間 (Prof)**: 任意の2点を分離する「開かつ閉な集合 (clopen set)」が存在するコンパクトHausdorff空間。有限離散空間の逆極限として書けるため、プロ有限空間とも呼ばれます。

(3) **極度不連結コンパクトHausdorff空間 (ExtDisc)**: 任意の開集合の閉包が、再び開集合 (したがって開かつ閉) になる空間。これは **Prof** よりもさらに強い不連結性を持ちます。

2. 充満忠実性の証明の核心

サイトを $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{CHaus}$ としたとき、関手 $\Phi: \mathbf{Top}_{CG} \rightarrow [\mathcal{S}^{op}, \mathbf{Set}]$ が充満忠実であることを示すには、任意のCG空間 X, Y について、写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Nat}(C(-, X), C(-, Y))$$

が全単射であることを示せば十分です。

忠実性 (単射性) は、 \mathcal{S} が1点空間 $\{*\}$ を含むことから明らかです。問題は「**充満性 (全射性)**」、すなわち、 \mathcal{S} 上の任意の自然変換 α に対して、対応する集合としての写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるかという点です。

鍵となる事実：コンパクト空間は完全不連結空間の商空間である

この証明を支える決定的な定理は以下の通りです：**定理**：任意のコンパクトHausdorff空間 K に対して、ある極度不連結 (したがって完全不連結) コンパクトHausdorff空間 S と、連続な全射 (商写像) $p: S \rightarrow K$ が存在する。

この S としては、例えば離散集合としての K のストーン・チェック・コンパクト化 $S = \beta(K_d)$ を取ることができます。

ステップ1：連続性の判定条件の緩和

X がCG空間であるという定義は、もともと「すべてのコンパクトHausdorff空間 K からの写像」で判定するものでした。しかし、上記の定理により、これを制限できます。

K を任意のコンパクトHausdorff空間、 $g: K \rightarrow X$ を連続写像とします。上記の定理より全射 $p: S \rightarrow K$ ($S \in \mathbf{ExtDisc}$) が存在します。もし「任意の $S \in \mathbf{ExtDisc}$ からの連続写像 $h: S \rightarrow X$ に対して $f \circ h$ が連続」であるならば、 $f \circ g \circ p$ は連続です。 p はコンパクト空間からHausdorff空間への連続全射なので商写像であり、したがって $f \circ g$ も連続となります。

つまり、 X がCG空間であるなら、そのトポロジーは「**完全不連結 (あるいは極度不連結) なテスト空間からの連続写像**」だけで完全に決定できるのです。

ステップ2：自然変換から連続写像の構成

自然変換 $\alpha : C(-, X) \rightarrow C(-, Y)$ が与えられたとき、集合としての写像 $f : X \rightarrow Y$ を $f(x) = \alpha_{\{*\}}(x)$ で定義します。任意の $S \in \mathcal{S}$ と連続写像 $h : S \rightarrow X$ について、自然性より $\alpha_S(h) = f \circ h$ となります。 $\alpha_S(h)$ は定義により $C(S, Y)$ の元（連続写像）なので、 **$f \circ h$ は連続**です。

ステップ3：結論

ステップ1で見た通り、 X がCG空間であり、かつ \mathcal{S} が「任意のコンパクトHausdorff空間を商として被覆できるほど十分な対象（極度不連結空間など）」を含んでいるならば、「任意の $S \in \mathcal{S}$ からの合成が連続である」ことから f 自身の連続性が導かれます。

したがって、写像 $f : X \rightarrow Y$ は連続写像となり、 Φ の充満性が示されました。

3. まとめ：サイトごとの比較

サイト \mathcal{S}	名称・分類	CG空間上での性質	凝縮数学における役割
CHaus	コンパクトHausdorff	充満忠実	Pyknotic sets。最も直感的。
Prof	完全不連結コンパクトH	充満忠実	標準的な凝縮集合の定義域。
ExtDisc	極度不連結コンパクトH	充満忠実	βX などの射影的对象のみ。ホモロジー代数と相性が良い。

結論としての洞察

この充満忠実性は、「連続的な実数直線 \mathbb{R} のような空間でさえ、その本質的な情報はカントール集合やウルトラフィルターの空間（完全不連結なもの）からの『覗き見』だけで完全に捉えきれる」という驚くべき事実を物語っています。これにより、位相空間論を完全に「不連結な世界の層の理論」へと持ち込むことが正当化されます。